සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි /முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2025
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2025
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2025

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = x^2 - 2kx - k^2 - 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට ශුන්‍ය නොවන තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු $f(x) = 0$ හි මූල යැයි ද, $r = \dfrac{1}{2\alpha}$ හා $s = \dfrac{1}{2\beta}$ යැයි ද ගනිමු.

r හා s මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $4(k^2+1)x^2 + 4kx - 1 = 0$ බව හා $|r - s| = \dfrac{\sqrt{2k^2+1}}{k^2+1}$ බව පෙන්වන්න.

$y = x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ හා $y = x^3 + x^2 - x + 2$ හි ප්‍රස්තාරවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දෙක අතර තිරස් දුර $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) (i) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $(x-a)$ යන්න $p(x)$ බහුපදයක සාධකයක් නම්, $p(x) - (x-a)p'(x) = (x-a)^2 s(x)$ වන පරිදි $s(x)$ බහුපදයක් පවතින බව පෙන්වන්න; මෙහි $p'(x)$ යනු $p(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය වේ.

(ii) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = x^3 - \lambda x^2 - 2x - (x-2)(3x^2 + \mu x - 2)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-2)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව ද $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -3 බව ද දී ඇත. $\lambda = 1$ හා $\mu = -2$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (i) භාවිතයෙන්, $(x-2)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

12. (*a*) එකිනෙකින් වෙනස් පොත් පහක්, A, B හා C යන සිසුන් තිදෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත.

(i) A ට හරියටම පොත් 2 කුත්, B ට හරියටම පොත් 2 කුත් හා C ට හරියටම 1 පොතකුත්,

(ii) එක් එක් සිසුවාට අවම වශයෙන් 1 පොතක්

ලැබිය හැකි වෙනස් විධි ගණන සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{7r+4}{r(r+1)(r+2)}$, $f(r) = \dfrac{A}{r}$ හා $g(r) = \dfrac{B}{r+1}$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = [f(r) - f(r+2)] + [g(r) - g(r+1)]$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{9}{2} - \frac{2}{n+1} - \frac{5}{n+2}$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{2n} U_r + m\sum_{r=1}^{n-1} U_{n-r}\right) = 18$ වන පරිදි m තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4+a & 7 \\ 6 & 7 \\ 3a & 4 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{-1}$ පවතින පරිදි a හි අගයන් සොයන්න.

a ඇසුරෙන් **AB** සොයන්න.

$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ වන පරිදි a හි අගය නිර්ණය කරන්න.

a හි මෙම අගය සඳහා, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1} = 3\mathbf{I}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි **I** යනු ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $w = -\dfrac{\sqrt{2}(3+i)}{(1+2i)}$ යැයි ගනිමු. $|w| = 2$ හා $\operatorname{Arg} w = \dfrac{3\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$|z| = 2$ හා $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

තවද, ආගන්ඩ් සටහනක් මත A හා B යනු, පිළිවෙළින් z හා w සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. $AB^2 = 8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ බව පෙන්වන්න.

AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. AOC ත්‍රිකෝණය භාවිතයෙන් $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{24}\right) = \dfrac{1}{8}\left(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න; මෙහි O මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

(*c*) $m \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $(1 + \sqrt{3}\,i)^{3m}(1 + i)^8 = 2^{3m+4}$ බව දී ඇත.

m හි අඩුතම අගය සොයන්න.

14. (a) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ සඳහා, $f(x) = \dfrac{x^2+x+p}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p \in \mathbb{R}$ වේ. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය, x-ඛණ්ඩාංකය $-\dfrac{1}{3}$ වන ලක්ෂ්‍යයකදී, එහි තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය ඡේදනය කරන බව දී ඇත. $p = 2$ බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ සඳහා $f'(x) = -\dfrac{(3x+5)}{(x-1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය $f''(x)$ යන්න $\mathbb{R} - \{1\}$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{6(x+3)}{(x-1)^4}$ මගින් දෙනු ලබන **බව දී ඇත**.

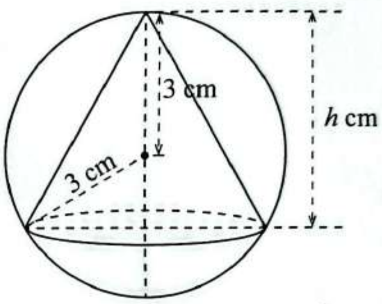
$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට $(-3, \dfrac{1}{2})$ හිදී නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය, ස්පර්ශෝන්මුඛ හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, අරය 3 cm ක් වූ ගෝලයක ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් අන්තර්ගත කළ යුතුව ඇත.

කේතුවේ උස h cm යැයි ගනිමු. කේතුවේ පරිමාව V cm^3 යන්න $V = \dfrac{\pi}{3}\left(6h^2 - h^3\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

තවද, ගෝලය තුළ අන්තර්ගත කළ හැකි විශාලතම එබඳු කේතුව ලැබෙන්නේ $h = 4$ වන විට බව පෙන්වන්න.



15. (a) $k \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1-k^2x)}\,dx$ සොයන්න.

(b) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ සඳහා $\dfrac{d}{dx}\left\{\ln\left(\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)\right\} = \dfrac{2}{\cos 2x}$ බව පෙන්වන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int (\cos 2x)\ln\left(\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)dx$ සොයන්න.

(c) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx$$ බව පෙන්වන්න.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin x + \cos(x+\frac{\pi}{3})}\,dx = \frac{\pi}{12}$$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

[දහවැනි පිටුව බලන්න.

16. O මූල ලක්ෂ්‍යය ද, $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ යැයි ද ගනිමු. $A\hat{O}B$ හා $O\hat{A}B$ කෝණවල කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයා, මෙම කෝණ සමච්ඡේදක $D \equiv \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

D සිට OA රේඛාවට ලම්බ දුර සොයන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයේ පාද තුනම ස්පර්ශ කරන C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 වෘත්තය, OA හා AB ස්පර්ශ කරන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E හා F යැයි සිතමු. A, E හා F ලක්ෂ්‍ය හරහා යන C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය $4x^2 + 4y^2 - 9x - 13y + 15 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්තයන්හි ඡේදනය ප්‍රලම්බ දැයි නිර්ණය කරන්න.

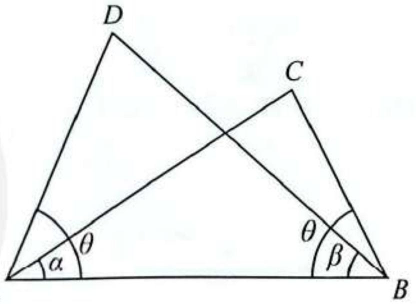
17. (*a*) $\sin A, \sin B, \cos A$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වන්න.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\cot\theta - 2\tan\theta = \sin 2\theta$ සමීකරණය $a\cos^4\theta + b\cos^2\theta + c = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a, b හා c තාත්ත්වික නියත වේ.

ඒ නයින්, $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) තලයක් මත A, B, C හා D ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $B\hat{A}D = A\hat{B}C = \theta$ හා $3AD = 4BC$ වන පරිදි ය.



$B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{B}D = \beta$ යැයි ගනිමු. (රූපය බලන්න.)

සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta\sin(\theta+\alpha)}$ බව පෙන්වන්න.

$\cot\theta = 3\cot\alpha - 4\cot\beta$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) පහත සමගාමී සමීකරණ, x හා y සඳහා විසඳන්න:

$\sin^{-1}\sqrt{x} = \cos^{-1}\sqrt{y}$

$\tan(\tan^{-1}3x - \tan^{-1}2y) + \tan(\tan^{-1}3y - \tan^{-1}2x) = 1$.

* * *